Strumenti matematici

I rapporti

Un **rapporto** dà un'informazione relativa a un'unità.

In una scuola ci sono 300 studenti e 60 computer. In media ci sono 300:60 = 333/60 = 5 studenti per ogni computer. Il rapporto studenti/computer dice quanti studenti condividono UN computer.

Un rapporto può essere espresso sotto forma di frazione:

$$a : b = \frac{a}{b}.$$

OSS 1: tenendo fisso il denominatore, se il numeratore aumenta, il rapporto aumenta.
OSS 2: tenendo fisso il numeratore, se il denominatore aumenta, il rapporto diminuisce.

Le proporzioni

Una **proporzione** è un'uguaglianza di rapporti.

$$3 : 2 = 6 : 4 \quad \text{oppure} \quad \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$$

Nella proporzione $a : b = c : d$, b e c sono detti "medi" e a e d sono detti estremi. Per essa vale la proprietà fondamentale: $a \cdot d = b \cdot c$. Pertanto posso risolvere la proporzione rispetto ad un termine incognito in essa presente:

se vale $6 : 4 = x : 10$ allora $x = \frac{6 \cdot 10}{4}$

se vale $9 : 3 = 6 : x$ allora $x = \frac{3 \cdot 6}{9}$

Le percentuali

La **percentuale** è un rapporto che ha come *denominatore* 100.

$$25\% = \frac{25}{100} = 0{,}25.$$

Il simbolo % significa "fratto 100" cioè "diviso per 100".

Aumento in percentuale.

Es. *C'erano 20 studenti che poi sono aumentati del 15%.*

$$20 + \frac{15}{100} \cdot 20 = 20 + 6 = 26$$

Diminuzione in percentuale.

Es. *C'erano 20 studenti che poi sono diminuiti del 10%.*

$$20 - \frac{10}{100} \cdot 20 = 20 - 2 = 18$$

I grafici

Un **grafico** rappresenta in modo **visivo** la relazione tra due grandezze.

Per costruire un grafico si può partire da una **tabella** o da una **formula**.

Tabella $\Rightarrow$ grafico

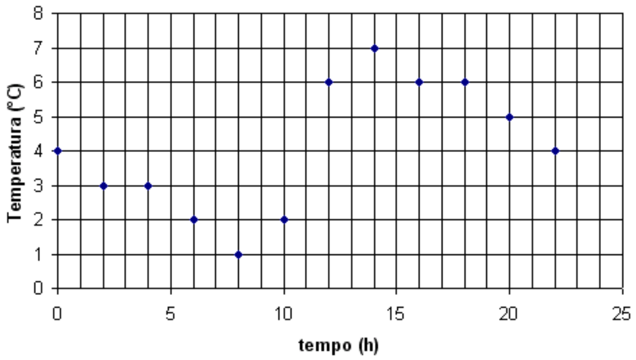
Considera la seguente tabella che dà i valori della temperatura a diverse ore della giornata:

Tempo (h)	Temperatura (°C)
0	4
2	3
4	3
6	2
8	1
10	2
12	6
14	7
16	6
18	6
20	5
22	4

Per costruire il grafico corrispondente:

1. si disegna un piano cartesiano e per ciascuno degli assi si scrivono grandezza e unità di misura
2. si sceglie opportunamente la scala sull'asse orizzontale e su quello verticale
3. si riportano le coppie di valori individuando, per ciascuna di esse, un punto.

L'asse orizzontale (**ascisse**) rappresenta la variabile *indipendente* e quello verticale (**ordinate**) la variabile *dipendente*.

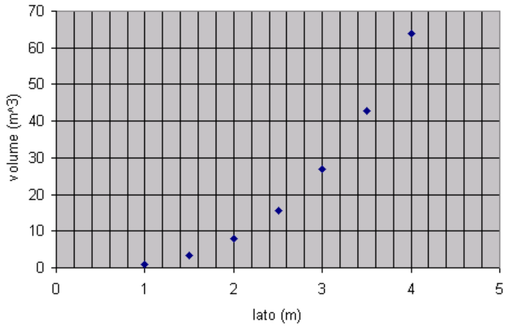


Formula $\Rightarrow$ grafico

Data la formula del volume del cubo di lato l, $V = l^3$, è possibile costruire la tabella:

lato	volume
1	1
1,5	3,375
2	8
2,5	15,625
3	27
3,5	42,875
4	64

e, quindi, il grafico

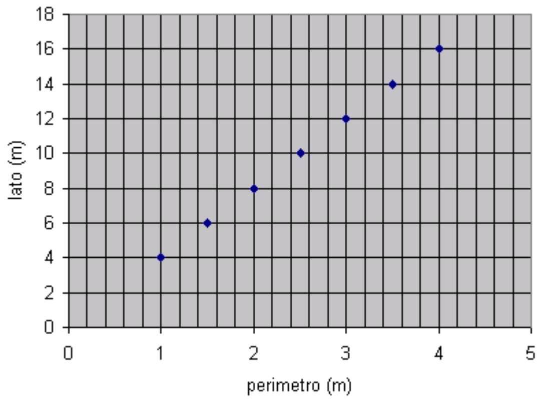


Se calcolassimo il volume per altri valori di l, più ravvicinati tra sé, otterremmo dei punti più fitti e quindi una curva più definita. Questo è sempre possibile quando si crea un grafico partendo da una formula.

- La proporzionalità diretta

Due grandezze x e y si dicono **direttamente proporzionali** se al crescere di x di un fattore K anche y cresce secondo lo stesso fattore K.
Ad esempio il perimetro di un quadrato e direttamente proporzionale al lato

lato (m)	perimetro (m)
1	4
1,5	6
2	8
2,5	10
3	12
3,5	14
4	16



Per due grandezze x e y direttamente proporzionali:

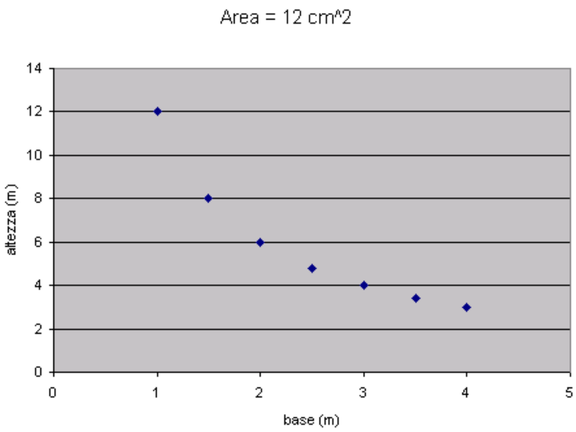
- La formula che le lega è $y = K \cdot x$
- Il loro rapporto è costante, $K = \frac{y}{x}$
- Il grafico è una retta passante per l'origine.

- La proporzionalità inversa

Due grandezze x e y si dicono **inversamente proporzionali** se al crescere di x di un fattore K si ha che y decresce secondo il fattore K.

Ad esempio la base e l'altezza di due rettangoli aventi la stessa area sono tra sé inversamente proporzionali.

Area rett. = 12 cm^2	
base (m)	altezza (m)
1	12
1,5	8
2	6
2,5	4,8
3	4
3,5	3,43
4	3



Per due grandezze x e y direttamente proporzionali:

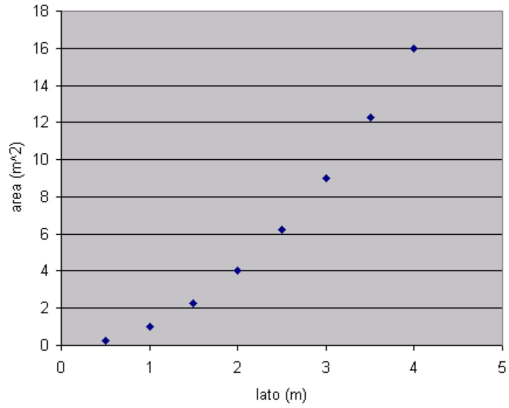
- La formula che le lega è $y = \frac{K}{x}$
- Il loro prodotto è costante, $x \cdot y = K$
- Il grafico è un arco di iperbole.

- La proporzionalità quadratica diretta

Una grandezza y è **direttamente proporzionale al quadrato** di una grandezza x se quando x diventa n volte allora y diventa n^2 volte.

Ad esempio l'area del quadrato è direttamente proporzionale al quadrato del lato.

base (m)	area (m^2)
0,5	0,25
1	1
1,5	2,25
2	4
2,5	6,25
3	9
3,5	12,25
4	16



Se una grandezza y è rettamente proporzionale al quadrato di una grandezza x, valgono le seguenti proprietà:

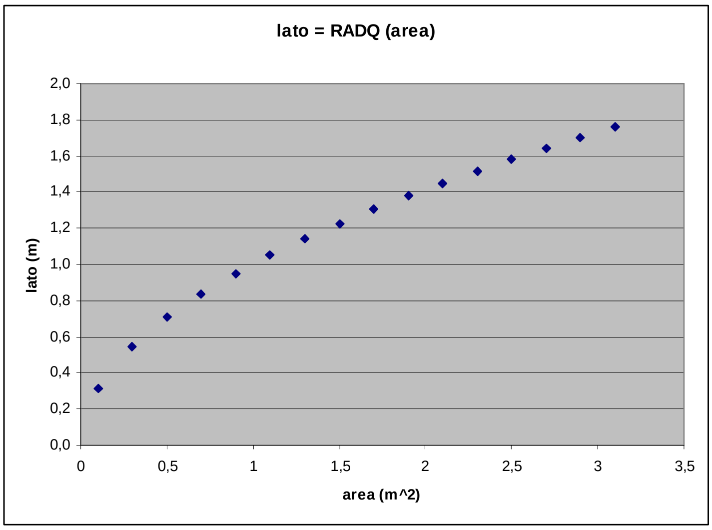
- La formula che le lega è $y = K{\cdot}x^2$
- Il rapporto tra y e il quadrato di x è costante, $K = \frac{y}{x^2}$
- Il grafico è un arco di parabola.

OSS: a volte succede di utilizzare una relazione inversa rispetto a quella di proporzionalità quadratica.

Ad esempio supponiamo di conoscere l'area *A* di un quadrato e voler determinare il lato *l*. La formula sarà:

$$l = \sqrt{A}$$

area (m^2)	lato (m)
0,1	0,3
0,3	0,5
0,5	0,7
0,7	0,8
0,9	0,9
1,1	1,0
1,3	1,1
1,5	1,2
1,7	1,3
1,9	1,4
2,1	1,4
2,3	1,5
2,5	1,6
2,7	1,6
2,9	1,7
3,1	1,8



Più in generale possiamo incontrare una legge di questo tipo:

$$y = K \cdot \sqrt{x}$$

Un altro esempio di legge con questa struttura è quella che lega il periodo di oscillazione del pendolo, T, con la lunghezza L del suo braccio:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{L} \cong 2 \cdot \sqrt{L}$$ essendo [T] = s, [L] = m e [g] = m/s^2

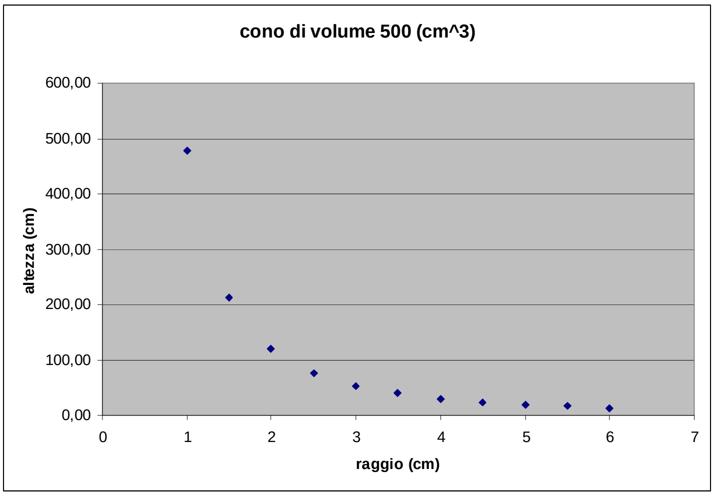
- La proporzionalità quadratica inversa

Due grandezze x e y si dicono **inversamente proporzionali al quadrato** se al crescere di x di un fattore n si ha che y decresce secondo il fattore n^2.

Ad esempio l'altezza *h* di un cono circolare di volume *V* "fissato" è inversamente proporzionale al quadrato del raggio di base *r*:

$$\frac{1}{3}\pi h r^2 = V \text{ allora } h = \frac{3V}{\pi} \cdot \frac{1}{r^2}$$

volume 500 cm^3	
raggio (cm)	altezza (cm)
1	477,71
1,5	212,31
2	119,43
2,5	76,43
3	53,08
3,5	39,00
4	29,86
4,5	23,59
5	19,11
5,5	15,79
6	13,27



Per due grandezze x e y direttamente proporzionali:

- La formula che le lega è $y = \frac{K}{x^2}$
- E' costante il prodotto tra y e il quadrato di x, $y \cdot x^2 = K$
- Il grafico assomiglia ad un arco di iperbole.